*

En predikatlogisk utvidelse av den treverdige setningslogikken S;μ.

*

Morten Rognes

1989

*

En predikatlogisk utvidelse av den treverdige setningslogikken S;μ

§ 0

I dette notatet skal vi gi et kort resymé av en predikatlogisk utvidelse av den treverdige setningslogikken S;μ som ble studert i Rognes [1]. Hensikten er bare å gi et kort sammendrag av de viktigste syntaktiske og semantiske begrepene i forbindelse med denne predikatlogikk. Dessuten vil vi formulere noen mer elementære resultater uten bevis. Vi starter med å beskrive språket til logikken. Dette kalles L

§ 1 Språket L

Vokabularet til språket L består av de følgende tegn:

1.1	Parantestegnene: (,)
1.2	De logiske konnektiver: ¬, –>, μ, A
1.3	Beskrivelsesoperatoren: i
1.4	Variabeltegnene: x,y,z,w,x',y',z',w,'.....
1.5	n-ære predikater for n≥1
1.6	Det binære identitetspredikatet: =

§ 1.1

Vi lar <X;0,Y;0> være definert som det minste paret <X,Y> hvor X og Y oppfyller de følgende krav:

1.11	X og Y er mengder av uttrykk i L. Et uttrykk i L er en endelig sekvens av tegn hentet fra vokabularet til L
1.12	Er v et variabeltegn så er vêY
1.13	Er pêX og v et variabeltegn så er (iv)p êY
1.14	Er t;1,...,t;nêY (n≥1) og er P et n-ært predikat så er P(t;1...t;n)êX
1.15	Er p,qêX og v et variabeltegn i L så er ¬p, (p–>q), μ(p), (Av)p êX.

Termene i L er uttrykkene i Y;0. Vi betegner dem med Tm(L). Formlene i L er uttrykkene i X;0. Klassen av disse betegnes med Fm(L).

§ 1.2

De vanlige syntaktiske begrepene som innføres i forbindelse med predikatlogiske språk innføres i L på forventet måte. Fri og bundet forekomst av et variabeltegn, åpen formel, lukket formel, notasjonen a;(v;1)[v,2], notasjonen a;(v;1...v;n)[t;1,...,t;n], etc. innføres som i de vanlige lærebøker i logikk. (Se f. eks. Shoenfield [1]). Et n-ært predikat (n≥1) sies å forekomme μ-fritt på et bestemt sted i en formel p eller en term t om det på dette sted ikke forekommer som en del av en formel av typen μ(p). En forekomst av et predikat som ikke er

μ-fri kalles μ-bundet. En formel kalles μ-lukket om alle predikatsymboler som opptrer i formelen overalt forekommer μ-bundet. Er en formel ikke μ-lukket kalles den for μ-åpen.

§2 Semantikk

Med en modell for L forstår vi et 4-tuple <D,+,*,f> som oppfyller de følgende krav:

(a) D er en ikke-tom mengde.
(b) + og * er objekter som ikke er med i D
(c) +, *, 1 og 0 er distinkte objekter.
(d) f er en funksjon som til ethvert n-ært predikat (n≥1) i L tilordner en funksjon i mengden {1,0,*}^(D^n)
(e) Er x,y vilkårlige objekter i D krever vi at f(=)(x,y) = 1 hvis og bare hvis x=y og at F(=)(x,y) =0 hvis og bare hvis x≠y.

Dette avslutter definisjonen av hva som forstås med en modell for L.

Vi innfører den følgende konvensjon. Er R =<D,+,*,f> en modell for L betegner R(P) den funksjonen som f tilordner P om P er et n-ært predikat. Videre betegner D;R domenet i modellen, mao. D om R=<D,*,+,*,f>.

§ 2.1

Med en verditilordning over en modell R for L forstår vi en funksjon der domenet er mengden av variabeltegnene i L og hvor verdiområdet er inkludert i D;R. Dette innebærer at en verditilordning over en modell R for L er en funksjon i mengden (D;R)^Var der Var betegner klassen av variabeltegn i L. Klassen av verditilordninger over R betegnes i det følgende med V(R).

§ 2.2

Anta R=<D,+,*,f> er en modell for L. Da lar vi R* være den minste funksjonen F som oppfyller de følgende krav:

2.2.1 (a) Dom(F) = (Fm(L) U Tm(L))X V(R)
(b) Rgn(F) Inkl (D U{+} U {*,0,1})
2.2.2 Er pêFm(L) & πêV(R) så er F(p,π)ê{*,0,1}
2.2.3 Er têTm(L) & πêV(R) så er F(t,π)êDU{+}
2.2.4 Er v et variabeltegn og πêV(R) så er F(v,π)= π(v)
2.2.5 (a) Er pêFm(L) og v et variabeltegn og har man (Ea)(aêD;R & F(p,π(v/a)) = *, der πêV(R), så er F((iv)p,π) = +
(b) Er pêFm(L), πêV(R), v et variabeltegn, er videre F(p, π(v/a))≠ * for alle aêD(R) og finnes det et objekt bêD;R slik at Mg(a: aêD;R & F(p, π(v/a))=1) = {b}, så er F((iv)p,π) = b
(c) Er pêFm(L), πêV(R), v et variabeltegn, er videre F(p, π(v/a))≠ * for alle aêD(R) og finnes det ikke noe objekt bêD;R slik at Mg(a: aêD;R & F(p, π(v/a))=1) = {b}, så er F((iv)p,π) = +.
2.2.6 Er P et n-ært predikat,πêV(R), t;1,..., t;n êTm(L) og er F(t;i,π)= + for noe iê{1,...,n} så er F(Pt;1...t;n, π) = *
2.2.7 Er P et n-ært predikat, πêV(R), t;1, ... ,t;nêTm(L) og F(t;i,π)êD;R for i=1,...,n har man:

(a) $F(Pt;1...t;n, \pi) = 1 \leftrightarrow R(P)(F(t;1,\pi),...,F(t;n, \pi)) = 1$
(b) $F(Pt;1...t;n, \pi) = 0 \leftrightarrow R(P)(F(t;1,\pi),...,F(t;n, \pi)) = 0$
(c) $F(Pt;1...t;n, \pi) = * \leftrightarrow R(P)(F(t;1,\pi),...,F(t;n, \pi)) = *$

2.2.8 Er $p \hat{e} Fm(L)$ og $\pi \hat{e} V(R)$ så:
(a) $F(\neg p,\pi) = 1 \leftrightarrow F(p,\pi) = 0$
(b) $F(\neg p,\pi) = 0 \leftrightarrow F(p,\pi) = 1$
(c) $F(\neg p,\pi) = * \leftrightarrow F(p,\pi) = *$

2.2.9 Er $p,q \hat{e} Fm(L)$ og $\pi \hat{e} V(R)$ så er:
(a) $F(p \rightarrow q,\pi) = *$ om enten $F(p,\pi) = *$ eller $F(q,\pi) = *$
(b) Er $F(p,\pi) \neq *$ og $F(q,\pi) \neq *$ så er $F(p \rightarrow q,\pi) \hat{e} \{0,1\}$ og
$F(p \rightarrow q,\pi) = 1 \leftrightarrow (F(p,\pi)=0 \text{ v } F(q,\pi) = 1)$

2.2.10 Er $p \hat{e} Fm(L)$ og $\pi \hat{e} V(R)$ så er:
(a) $F(\mu(p),\pi) = 1 \leftrightarrow F(p,\pi) = 1$
(b) $F(\mu(p),\pi) = 0 \leftrightarrow F(p,\pi) \hat{e} \{0,*\}$

2.2.11 Er $p \hat{e} Fm(L)$, $\pi \hat{e} V(R)$ og v et variabeltegn så er:
(a) $F((Av)p,\pi) = * \leftrightarrow (Ea)(a \hat{e} D;R \ \& \ F(p,\pi(v/a)) = *)$
(b) Har man $(Aa)(a \hat{e} D;R \rightarrow F(p,\pi(v/a)) \neq *)$ gjelder $F((Av)p,\pi) \hat{e} \{0,1\}$ og at:
$F((Av)p,\pi) = 1 \leftrightarrow (Aa)(a \hat{e} D;R \rightarrow F(p, \pi(v/a))=1)$

Dette avslutter definisjonen av valuasjonsfunksjonen R*.

Merk at vi vil skrive "$R(p,\pi) = 1$" istedet for "$R^*(p,\pi)=1$" der dette ikke kan føre til noen misforståelser.

Tilslutt bemerker vi at en formel p i L kalles gyldig, i symboler "$Val;\mu(p)$", hvis og bare hvis vi har at $R^*(p,\pi) = 1$ for enhver modell R for L og enhver verditilordning $\pi \hat{e} V(R)$.

§3 Gyldige formler i L.

Vi nevner de følgende resultater, uten bevis, angående gyldigheten til formler i språket L.

Alle instanser av de følgende skjemata A1 – A17 er gyldige formler i L:

A1 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
A2 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
A3 $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
I A1 – A3 forutsettes det at ingen predikater forekommer μ-fri i p, q eller r bortsett fra identitetspredikatet "=" som kan forekomme μ-fri på steder hvor det er plassert mellom to variabeltegn.
A4 $(Ax)(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (Ax)q)$
forutsatt at varibeltegnet x ikke forekommer fri i p og forutsatt at forbeholdet nevnt i forbindelse med A1 – A3 også gjelder for p og q
A5 $(Ax)p \rightarrow p;x[y]$
forutsatt at forbeholdet nevnt ved A1 – A3 gjelder for p.
A6 $(Ax)(x=x)$
A7 $x = y \rightarrow (p \rightarrow q)$
forutsatt at q er som p bortsett fra eventuelt ved å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor p har en fri forekomst av x og hvor ingen predikater forekommer μ-fri i p,q bortsett fra identitetspredikatet som kan forekomme μ-fri på steder hvor det står mellom variabeltegn.
A8 $\mu((Ax)p) \leftrightarrow (Ax)\mu(p)$

A9 $\mu(\neg(Ax)p) \leftrightarrow ((Ax)(\mu(p) \vee \mu(\neg p)) \& \neg\mu((Ax)p))$
A10 $\mu(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\mu(p) \& \mu(q)) \vee (\mu(\neg p) \& \mu(q)) \vee (\mu(\neg p) \& \mu(\neg q))]$
A11 $\mu(\neg(p \rightarrow q)) \leftrightarrow [(\mu(p) \vee \mu(\neg p)) \& (\mu(q) \vee \mu(\neg q)) \& \mu(p) \& \mu(\neg q)]$
A12 $\mu(\neg p) \rightarrow \neg\mu(p)$
A13 $\mu(\neg\neg p) \leftrightarrow \mu(p)$
A14 $p \leftrightarrow \mu(p)$
forutsatt at det forbeholdet som ble nevnt i forbindelse med A1 – A3 gjelder om p.
A15 $\mu(x = (iy)p) \leftrightarrow \mu((Ay)(p \leftrightarrow y = x))$
forutsatt at x og y er distinkte variabeltegn.
A16 $Konj/i,1,n/(\mu(t;i = t';i)) \rightarrow [(\mu(Pt;1... t;n) \leftrightarrow \mu(Pt';1...t';n)) \& (\mu(\neg Pt;1... t;n) \leftrightarrow \mu(\neg Pt';1...t';n))]$
A17 $\mu(Pt;1...t;n) \vee \mu(\neg Pt;1...t;n) \rightarrow Konj/i,1,n/((Ez)(\mu(z=t;i)))$
forutsatt at z ikke forekommer fri i noen av t;1, ... ,t;n.

Dette avslutter listen over skjemata.

Vi har at modus ponens og universell generalisering er gyldighets-bevarende. Det holder med andre ord at:

(I) $Val;\mu(p) \& Val;\mu(p \rightarrow q) \rightarrow Val;\mu(q)$
(II) $Val;\mu(p) \rightarrow Val;\mu((Ax)p)$

hvor p,q er formler i L og x er et variabeltegn.

Det formale system som har L som sitt språk, A1 – A17 som sine aksiomskjemaer og hvor slutningsreglene bare er modus ponens og universell generalisering vil vi her kalle for QS;μ. Hvis bemerkningene ovenfor er korrekte har man at gyldighetsteoremet holder for QS;μ. Dette kan formuleres slik:

Teorem 1 (Gyldighetsteorem)
$(Ap)(p\hat{e}Fm(L) \rightarrow (Th(QS;\mu, p) \rightarrow Val;\mu(p)))$

En formel i L vil her bli kalt for *deskriptiv* om alle predikater i den forekommer μ-bundet bortsett fra eventuelt identitetspredikatet som kan forekomme μ-fritt på steder hvor det bare står mellom variabeltegn.

Vi gjetter på at systemet QS;μ er komplett med hensyn på klassen av deskriptive formler i L. Betegnes denne formelklassen med D;y kan gjetningen formuleres kompakt på den følgende måte:

Teorem 2 (Fullstendighetsteorem)
$(Ap)(p\hat{e}Fm(L)\Omega D;\mu \& Val;\mu(p) \rightarrow Th(QS;\mu, p)$

På grunnlag av definisjonen av gyldig formel er det lett å se at følgende regel holder:

(III) $Val;\mu(\mu(p)) \rightarrow Val;\mu(p)$.

Slutningsregelen som tillater en å slutte at p er et teorem om μ(p) er et teorem kaller vi for N. Systemet QS;μ utvidet med denne slutningsregelen i tillegg til modus ponens og universell

generalisering kaller vi for QS;μ+N. Siden regelen N bevarer gyldighet har man at gyldighetsteoremet holder for QS;μ+N:

Teorem 3 (Gyldighetsteorem)
(Ap)(pêFm(L) –> (Th(QS;μ+N, p) –> Val;μ(p)))

Det følgende fullstendighetsteorem for QS;μ+N kan utledes ved hjelp av Teorem 2:

Teorem 4 (Fullstendighetsteorem)
(Ap)(pêFm(L) & Val;μ(p) –> Th(QS;μ+N, p)

Tilslutt bemerker vi at bevis for Teorem 1 – 4, samt en rekke andre satser om systemer som er beslektet med QS;μ, vil bli gitt i et senere arbeid.

Dette avslutter vår redegjørelse for den predikatlogike utvidelsen av S;μ som vi ønsket å betrakte her.

*****

Referanser

Referanser

Rognes [1], Rognes, Morten, *Aksiomatiseringer av noen treverdige setningslogikker relatert til Halldens "Logic of Nonsense" and Segerbergs H;0*, Maskinskrevet manuskript, 1988

Shoenfield [1], Shoenfield, Joseph R., Mathematical logic, Addison -Wesley, 1967

***